XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–4)

Sobre un resultado de no existencia de soluciones positivas para un problema elíptico en el semi–espacio

S. Lorca

I.A.I - Universidad de Tarapacá, Casilla 7-D, Arica. E-mails: slorca@uta.cl.

Palabras clave: xxxxx, xxxxx, xxxxxx

Resumen

Resultados del tipo Liouville en $\mathbb{R}^N$ o en el semi–espacio $\mathbb{R}^N_+$ pueden ser importantes para la obtención de estimaciones a priori en problemas asociados en dominios acotados, via algún procedimiento de blow-up. En esta presentación mostramos un resultado de no existencia de soluciones positivas de

$$u^p \leq -\Delta_m u \leq Cu^p,$$

en el semi–espacio

1. Introducción

Considerese el problema

$$-\Delta_m u \geq u^p \qquad \text{en } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

donde $1 < m < N$ and $m - 1 < p < N\,(m-1)\,/\,(N-m)$. Mitidieri y Pohozaev provaron en [5], entre otros resultados, que el problema (1) no tiene solución positiva.

Por otro lado, hasta donde el autor pudo pesquisar, no hay un resultado similar en el semi–espacio $\mathbb{R}^N_+ = \left\{x = (x_1, \ldots, x_N)\,\mathbb{R}^N : x_N > 0\right\}$.

Este tipo de resultado puede ser útil para demostrar resultados de existencia en problemas relacionados, por ejemplo: $-\Delta_m u = f(x,u)$ en Ω ; $u = 0$ on $\partial\Omega$, en dominios acotados, en especial si el problema considerado no es variacional (ver por ejemplo [4], [2], [6] y sus respectivas referencias). Usualmente esas estimaciones a priori son obtenidas usando la llamada técnica de blow-up . Supóngase por contradicción, que existe una sucesión $(u_n)_n$, de soluciones par el problema asociado y que además se satisface que u_n es no acotada (en la norma L^∞). Sea x_n un punto en el que u_n alcanza su máximo. Con ciertas hipótesis para la función f, el método de blow-up proporciona una solución no trivial de

$$-\Delta_m u \geq u^p,$$

en $\mathbb{R}^N$ o en el semi–espacio.

Para no permitir que ocurra el caso del semi–espacio, se asume en [2] que Ω es convexo, f no depende de x y $1 < m \leq 2$. Estas hipótesis, junto con el método de los planos móviles, permiten obtener una solución positiva de $-\Delta_m u \geq u^p$ en $\mathbb{R}^N$, lo que contradice el resultado tipo Liouville obtenido en [5].

En [6], una variación de la técnica de blow-up es propuesta, pero la explosión se centra en cierto punto y_0 y no en los puntos de máximo x_n. Para hacer esto, el valor de las soluciones en diferentes puntos de Ω se compara usando un tipo de desigualdad de Harnack (ver [6], [7], [8] y [9]). Utilizando este procedimiento, el problema limite obtenido vía blow-up estará definido en todo $\mathbb{R}^N$, obteniendose de nuevo una contradicción con [5].

Sin embargo, en esos resultados no es usado el hecho de que la función limite también satisface $-\Delta_m u \leq Cu^p$. En este trabajo se emplean estimaciones integrales locales y desigualdades de Harnack para probar que esta inecuación adicional implica la no existencia de soluciones positivas de $-\Delta_m u \geq u^p$ en el semi–espacio (Theorem 3.1).

En la Sección 2 se enuncian algunos resultados previos y en la Sección 3 se prueba el resultado de no existencia en $\mathbb{R}^N_+$.

2. Preliminares

Se enuncian a continuación dos resultados que serán necesarios en la próxima sección. El primero es una conocida estimación integral (ver [1], [6] y [8]).

Lema 2.1 *Sea u una solución débil, postiva y de clase C^1 de la inecuación:*

$$-\Delta_m u \geq u^p,$$

en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, donde $p > m - 1$. Tome $r \in (0, p)$ y denote por $B(.;R)$ una bola de radio R de manera que $B(.;2R)$ esté incluida en Ω.

Entonces, existe una constante positiva $c = c\,(N, m, p, \gamma)$ tal que

$$\int_{B(.;R)} u^r \leq cR^{N-mr/(p+1-m)}.$$

Se usará también la siguiente desigualdad de Harnack debida a Trudinger [9].

Lema 2.2 *Sea u una solución débil, no negativa de $-\Delta u \geq 0$ en Ω. Tome $\gamma \in (0, N\,(m-1)\,/\,(N-m))$ y $R > 0$ tal que $B(.;2R) \subset \Omega$. Entonces existe $C = C\,(N, m, \gamma)$ tal que*

$$\inf_{B(.;R)} u \geq CR^{-N/\gamma}\,\|u\|_{L^\gamma(B(.;2R))}\,.$$

3. No existencia en $\mathbb{R}_+^N$

Como ya se mencionó en la introducción, resultados de no existencia en $\mathbb{R}^N$ o en el semi–espacio pueden ser importantes en la obtención de soluciones vía algún procedimiento de blow-up. Sin embargo, resultados del tipo Liouville son a menudo mas difíciles de obtener en el segundo caso.

Considérese el siguiente problema

$$u^p \leq -\Delta_m u \leq Cu^p \qquad \text{in } \mathbb{R}_+^N, \tag{2}$$

donde $C \geq 1$. Se tiene lo siguiente.

Teorema 3.1 *Asuma que* $m-1 < p < N\,(m-1)\,/\,(N-m)$. *Entonces, no existe solución positiva en* $C^1(\mathbb{R}_+^N)$ *para el problema* (2).

Demostración:

Asúmase por contradicción que u es una solución positiva de (2). Sea $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$ tal que $u(x_0) > 0$ y sea $\delta = d(x_0, \partial\mathbb{R}_+^N)$. Por translación se puede asumir que $x_0 = (0, \ldots, \delta)$. Debido a la continuidad de la función u, existen números $\widetilde{\delta} \in (0, \delta)$ y $k > 0$ tal que

$$u\,(x) > k > 0,$$

para todo x en $B(x_0; \widetilde{\delta})$.

Si $\beta > 0$, las funciones $v_\beta\,(x) = \beta u\left(\beta^{(p+1-m)/m} x\right)$ también verifican (2) y

$$v_\beta\,(x) > k\beta,$$

para todo x en $B(\beta^{-(p+1-m)/m} x_0; \widetilde{\delta}\beta^{-(p+1-m)/m})$.
Sean $x \in B(\beta^{-(p+1-m)/m} x_0; \widetilde{\delta}\beta^{-(p+1-m)/m})$ y $\beta > 1$, se tiene

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\leq \left|x - \beta^{-(p+1-m)/m} x_0\right| + \left|\beta^{-(p+1-m)/m} x_0 - x_0\right| \\ &< \widetilde{\delta}\beta^{-(p+1-m)/m} + \left(1 - \beta^{-(p+1-m)/m}\right)|x_0| \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Es decir, $B(\beta^{-(p+1-m)/m} x_0; \widetilde{\delta}\beta^{-(p+1-m)/m}) \subset B(x_0; \delta)$.

Para poder aplicar Lema 2.2, nótese que las funciones v_β son no negativas y satisfacen la inecuación $-\Delta_m v_\beta \geq 0$. Escogiendo γ de manera que $(p+1-m)\,N/m < \gamma < N\,(m-1)\,/\,(N-m)$ se tiene por Lema 2.2 que

$$\begin{aligned} \min_{B(x_0;\delta/2)} v_\beta &\geq c\delta^{-N/\gamma}\left(\int_{B(x_0;\delta)} v_\beta^\gamma\right)^{1/\gamma} \\ &\geq c\delta^{-N/\gamma}\left(\int_{B(\beta^{-(p+1-m)/m} x_0;\widetilde{\delta}\beta^{-(p+1-m)/m})} v_\beta^\gamma\right)^{1/\gamma} \\ &\geq ck\beta^{(-(p+1-m)N/m+\gamma)/\gamma}, \end{aligned}$$

para todo $\beta > 1$. Por Lema 2.1 se tiene para $r \in (0, p)$

$$c\delta^N k^r \beta^{(-(p+1-m)N/m+\gamma)r/\gamma} \leq \int_{B(x_0;\delta/2)} v_\beta^r \leq c_1 \delta^{N-mr/(p+1-m)}.$$

Lo que es imposible si $\beta \to \infty$.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por FONDECYT 1051055.

Referencias

[1] M.-F. Bidaut-Veron & S.I. Pohozaev,*Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems*. J. Anal. Math., 84(2001), 1-49.

[2] C. Azizieh & P. Clément, *A Priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations*. J. Differential Equations, 179(2002), 412-428.

[3] L. Damascelli, *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and application to symmetry and monotonicity results*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 15(1998), 493-516.

[4] B. Gidas & J. Spruck,*A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. Partial Differential Equations, 6 (1981), 883-901.

[5] E. Mitidieri & S.I. Pohozaev,*Nonexistence of positive solutions for quasilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$. Proc. Steklov Inst. Math., 227(1999), 1-32.

[6] D. Ruiz, *A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems*. J. Differential Equations, 199(2004), 96-114.

[7] J. Serrin, *Local behaviour of solutions of quasilinear equations*, Acta Math., 111(1964), 247-302.

[8] J. Serrin & H. Zou,*Cauchy–Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities*. Acta Math., 189(2002), 79-142.

[9] N. Trudinger,*On Harnarck type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math., 20(1967), 721-747.